

HEC 2014 Problème

nIE 221

- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée Φ .
- La notation \exp désigne la fonction exponentielle.
- Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

- a. Montrer que la fonction N est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0,1[$.

Pour $x \in]0; 1[$, $1-x \in]0; 1[$ Donc $\ln(1-x)$ est définie.
Par composée et somme de fonctions \mathcal{C}^1 , N est \mathcal{C}^1 sur $]0; 1[$

- b. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.

Posons $f(x) = \ln(1-x) + x$ pour $x \in]0; 1[$
 f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-x}{1-x} < 0$$

f est donc décroissante sur $]0; 1[$ Or $f(0) = 0$

Donc, sur $]0; 1[$, $f(x) \leq 0 \iff \ln(1-x) \leq -x$

On peut également montrer ce résultat par un argument de concavité.

- c. On note N' la fonction dérivée de la fonction N .

Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a $N'(x) \leq 0$.

$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

$$N'(x) = 2x - 2 - 2(1-x)\frac{-1}{1-x} - 2(-1)\ln(1-x)$$

$$= 2x - 2 + 2 + 2\ln(1-x)$$

$$= 2x + 2\ln(1-x)$$

Or $\ln(1-x) \leq -x \Rightarrow 2x + 2\ln(1-x) \leq 0$ pour $x \in]0; 1[$

- d. En déduire pour tout $x \in]0,1[$, un encadrement de $N(x)$.

- $N(0) = 0$

- En 1

Posons $X = 1-x$ $(1-x)\ln(1-x) = X \ln X$

Quand $x \rightarrow 1$, $X \rightarrow 0$, $X \ln X \rightarrow 0$ (croissance comparée)

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} N(x) = -1$

- Or N est strictement décroissante sur $]0; 1[$, donc $-1 < N(x) \leq 0$.
(On a aussi $-1 < N(x) < 0$ pour $x \in]0; 1[$)

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que :

$$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$$

- a. Chercher le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

On note encore f la fonction ainsi prolongée.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$-2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ est finie.

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$

- c. Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f
Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2 \frac{N(x)}{x^3(1-x)}$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables

$$f(x) = -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -2 \frac{(x + \ln(1-x))'x^2 - (x + \ln(1-x))(x^2)'}{(x^2)^2} \\
 &= -2 \frac{\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)x^2 - (x + \ln(1-x))2x}{x^4} \\
 &= -2 \frac{(1-x-1)x^2 - (1-x)(x + \ln(1-x))(2x)}{(1-x)x^4} \\
 &= -2 \frac{(-x)x - 2(1-x)(x + \ln(1-x))}{(1-x)x^3} \\
 &= -2 \frac{-x^2 - 2x + 2x^2 - 2(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^3} \\
 &= -2 \frac{x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x^3} \\
 &= -2 \frac{N(x)}{(1-x)x^3}
 \end{aligned}$$

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1, +\infty[$.

- On a vu que sur $]0; 1[$, $-1 < N(x) < 0$
Donc $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$
De plus f est continue sur $[0; 1[$
Donc f est strictement croissante sur $[0; 1[$

- $f(0) = 1$

Quand $x \rightarrow 1^-$,

$$1 - x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(1-x) \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \rightarrow -\infty$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

- f est continue et strictement croissante sur $[0; 1[$, donc f réalise une bijection de $I = [0; 1[$ sur $f(I) = [1; +\infty[$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right)$$

a. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_n(x) dx$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx.$$

La fonction f est continue sur $[0; 1[$, donc g_n est continue sur $[0; 1[$.
L'intégrale est impropre en 1.

Or

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{nx^2}{2}f(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x) = 0$$

On peut donc prolonger g_n par continuité en 1 en posant

$$g_n(1) = 0$$

et donc l'intégrale I_n converge.

L'intégrale ici n'est pas vraiment impropre. Cela se produit à chaque fois que la fonction admet une limite finie là où la fonction n'est pas continue

b. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

- Sur $[0; 1]$, $g_n(x) \geq 0$
- Pour tout $x \in [0; 1[$, $f(x) \geq 1$

$$\Rightarrow -\frac{nx^2}{2}f(x) \leq -\frac{nx^2}{2}$$

$$\Rightarrow g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) \text{ car exp croissante sur } \mathbb{R}$$

c. En déduire l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right)$

- Pour tout $x \in [0,1[$,

$$0 \leq g_n(x) \leq \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 g_n(x) dx \leq \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx \quad \text{car } 0 \leq 1$$

(bornes dans le bon sens)

- Faisons le changement de variable suivant : $t = \sqrt{nx}$

$$dt = \sqrt{n} dx \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{n}} dt$$

$$\text{Bornes : } \begin{cases} x = 1 & t = \sqrt{n} \\ x = 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right) dx &= \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} dt \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} [\Phi(\sqrt{n}) - \Phi(0)] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left[\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

- Donc $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2})$

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

$$\text{Pour } x \geq 0, \frac{1}{2} \leq \Phi(x) < 1 \Rightarrow \Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \text{ D'où}$$

$$I_n \leq \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \times \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

4. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

$$n \geq 1 \Rightarrow n+2 \geq 3 > e \Rightarrow \ln(n+2) > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\ln(n+2)} < 1$$

$$\Rightarrow 0 < v_n < 1$$

b. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+2) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = f(0) \text{ car } f \text{ continue en } 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$

c. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} I_n &\geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \geq \\ &\frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \end{aligned}$$

- $v_n < 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_n &= \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^{v_n} g_n(x) dx + \int_{v_n}^1 g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} g_n(x) dx \\ &\text{car } g_n(x) \geq 0 \text{ sur } [v_n; 1] \end{aligned}$$

- $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right)$

Or f est strictement croissante sur $[0; v_n]$ Donc pour $x \in [0; v_n]$,

$$f(x) \leq f(v_n) = w_n$$

$$\Rightarrow -\frac{nx^2}{2} f(x) \geq -\frac{nx^2}{2} w_n$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) \geq \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right)$$

$$\Rightarrow g_n(x) \geq \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_n} g_n(x) dx \geq \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \text{ car } 0 \leq v_n$$

- Posons $t = \sqrt{nw_n} x \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{nw_n}} dt$

$$\text{Bornes } \begin{cases} x = v_n & t = v_n \sqrt{nw_n} \\ x = 0 & t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx &= \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{nw_n}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

d. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \leq I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1$$

• On a vu précédemment que : $0 \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

$$\Rightarrow I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq 1$$

• D'autre part :

$$I_n \geq \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Et

$$\frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{nw_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{v_n \sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} (\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \Phi(0))$$

$$\Rightarrow I_n \geq \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} (\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \Phi(0))$$

$$\Rightarrow I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \geq \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} (\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \Phi(0))$$

$$\Rightarrow I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \geq \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right)$$

e. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1$

$$v_n \sqrt{nw_n} = \frac{1}{\ln(n+2)} \sqrt{n} \sqrt{w_n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)} \sqrt{w_n}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+2)} \rightarrow +\infty \text{ (croissance comparée)}$$

$$w_n \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt{w_n} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow v_n \sqrt{nw_n} \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \Phi(v_n \sqrt{nw_n}) \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow 2 \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) \rightarrow 1$$

$$\text{Or } \sqrt{w_n} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}} \left(\Phi(v_n \sqrt{nw_n}) - \frac{1}{2} \right) = 1$$

Donc par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1$$

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_0(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{et} \quad J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

a. Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

$$J_1(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$$

Par intégration par parties.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0; x]$.

$$\begin{aligned} J_1(x) &= [-t \cdot e^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt \\ &= -x e^{-x} - [e^{-t}]_0^x \\ &= -x e^{-x} - e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

b. Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!} x^n e^{-x}.$$

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

Par intégration par parties.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = t^n & u'(t) = nt^{n-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0; x]$.

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{n!} \left([-t^n \cdot e^{-t}]_0^x - \int_0^x -nt^{n-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \frac{1}{n!} (-x^n e^{-x}) + \frac{n}{n!} \int_0^x -nt^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{n!} x^n e^{-x} + J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

- c. En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

$$\text{On a } J_k(x) - J_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!} x^k e^{-x} \text{ pour } k \geq 1$$

$$\text{Donc } \sum_{k=2}^n (J_k(x) - J_{k-1}(x)) = -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$$

Par télescopage :

$$\begin{aligned} J_n(x) - J_1(x) &= -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} \\ \Rightarrow J_n(x) &= J_1(x) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} \\ &= 1 - e^{-x} - x e^{-x} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} \end{aligned}$$

- d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $x^k e^{-x} \rightarrow 0$ (croissance comparée)

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = 1$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} n! J_n(x) =$$

- e. A l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n = n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n)$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) dx \\ &= \int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2} \times -2 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}\right) dx \\ &= \int_0^1 \exp\left(nx^2 \times \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}\right) dx \\ &= \int_0^1 \exp[n(x + \ln(1-x))] dx \end{aligned}$$

En posant $t = n(1-x) \Rightarrow dt = -n dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{n} dt$

$$\text{Et } x = 1 - \frac{t}{n}$$

$$\text{Bornes : } \begin{array}{ll} x = 1 & t = 0 \\ x = 0 & t = n \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \exp[n(x + \ln(1-x))] dx \\ &= \int_n^0 \exp\left[n\left(1 - \frac{t}{n} + \ln(t/n)\right)\right] \frac{-1}{n} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_n^0 \exp \left[n \left(1 - \frac{t}{n} + \ln(t/n) \right) \right] \frac{-1}{n} dt \\
&= \int_n^0 \exp [n - t + n \ln t - n \ln n] \frac{-1}{n} dt \\
&= \int_0^n \exp [n - t + n \ln t - n \ln n] \frac{1}{n} dt \\
&= \int_0^n e^n \times e^{-t} \times e^{n \ln t} \times e^{-n \ln n} \frac{1}{n} dt \\
&= \int_0^n e^n \times e^{-t} \times t^n \times n^{-n} \times \frac{1}{n} dt \\
&= e^n \times \frac{1}{n^n} \times \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} \times t^n dt \\
&= \frac{e^n}{n^{n+1}} n! \frac{1}{n!} \int_0^n e^{-t} \times t^n dt \\
&= \frac{e^n}{n^{n+1}} n! \times J_n(n)
\end{aligned}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de même loi de Poisson de paramètre 1.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

6. a. Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n .

S_n est une somme de variables indépendantes suivant des lois de Poisson. Donc S_n suit une loi de Poisson de paramètre $1 + \dots + 1 = n$

- b. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P([S_n \leq n])$ et $P([S_n \geq n])$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

$$\bullet P(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

On a vu que $J_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$

$$\Rightarrow J_n(n) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} n^k e^{-n} = 1 - P(S_n \leq n)$$

$$\Rightarrow P(S_n \leq n) = 1 - J_n(n)$$

$$\bullet P(S_n \geq n) = 1 - P(S_n \leq n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(S_n = k)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

On a vu que $J_n(x) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k e^{-x}$

$$\Rightarrow J_{n-1}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} x^k e^{-x} \quad \Rightarrow J_{n-1}(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} n^k e^{-n}$$

$$P(S_n \geq n) = J_{n-1}(n)$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n e^{-x}$.

- a. Étudier les variations de h_n sur \mathbb{R}_+ .

h_n continue et dérivable sur \mathbb{R}

$$h'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n \cdot (-e^{-x}) = x^{n-1}e^{-x}(n-x)$$

$$h'_n(x) > 0 \iff n-x > 0 \iff x < n$$

Donc h_n est croissante sur $[0; n]$ et décroissante sur $[n; +\infty[$

- b. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$\begin{aligned}
&P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) \\
&= -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)) dt
\end{aligned}$$

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt$$

$$P(S_n \leq n) = 1 - J_n(n)$$

$$\Rightarrow P(S_{n+1} \leq n+1) = 1 - J_{n+1}(n+1)$$

Donc

$$P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) = J_n(n) - J_{n+1}(n+1)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } J_n(x) &= J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^n e^{-x} \\ \Rightarrow J_{n+1}(x) &= J_n(x) - \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{-x} \\ \Rightarrow J_{n+1}(n) &= J_n(n) - \frac{1}{(n+1)!}n^{n+1}e^{-n} \\ \Rightarrow J_n(n) &= J_{n+1}(n) + \frac{1}{(n+1)!}n^{n+1}e^{-n} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) &= J_{n+1}(n) + \frac{1}{(n+1)!}n^{n+1}e^{-n} - J_{n+1}(n+1) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n t^{n+1}e^{-t}dt + \frac{1}{(n+1)!}n^{n+1}e^{-n} \\ &\quad - \frac{1}{(n+1)!} \int_0^{n+1} t^{n+1}e^{-t}dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} t^{n+1}e^{-t}dt + \frac{1}{(n+1)!} [(n+1) - n] n^{n+1}e^{-n} \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} t^{n+1}e^{-t}dt + \frac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} n^{n+1}e^{-n}dt \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(t)dt - \int_n^{n+1} h_{n+1}(n)dt \right) \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} \left(\int_n^{n+1} h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)dt \right). \end{aligned}$$

c. En déduire que la suite $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On sait que h_{n+1} est croissante sur $[0; n+1]$

Donc, pour $t \in [n; n+1]$, $h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_n^{n+1} h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)dt &\geq 0 \quad \text{car } n \leq n+1 \\ \Rightarrow P([S_{n+1} \leq n+1]) - P([S_n \leq n]) &\leq 0 \end{aligned}$$

La suite $(P([S_n \leq n]))$ est donc décroissante.

d. Étudier la monotonie de la suite $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On a : $P(S_n \geq n) = J_{n-1}(n)$

$\Rightarrow P(S_{n+1} \geq n+1) = J_n(n+1)$

Donc

$$P(S_{n+1} \geq n+1) - P(S_n \geq n) = J_n(n+1) - J_{n-1}(n)$$

Or

$$\begin{aligned} J_n(x) &= J_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}x^n e^{-x} \\ \Rightarrow J_n(n) &= J_{n-1}(n) - \frac{1}{n!}n^n e^{-n} \\ \Rightarrow J_{n-1}(n) &= J_n(n) + \frac{1}{n!}n^n e^{-n} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P(S_{n+1} \geq n+1) - P(S_n \geq n) &= J_n(n+1) - J_n(n) - \frac{1}{n!}n^n e^{-n} \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^{n+1} t^n e^{-t}dt - \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t}dt - \frac{1}{n!}h_n(n) \\ &= \frac{1}{n!} \int_n^{n+1} h_n(t)dt - \frac{1}{n!} \int_0^n h_n(n)dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(\int_n^{n+1} h_n(t) - h_n(n)dt \right) \end{aligned}$$

Or la fonction h_n est décroissante sur $[n; +\infty[$

Donc, pour $t \in [n; n+1]$, $h_n(t) - h_n(n) \leq 0$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} h_n(t) - h_n(n)dt \leq 0$$

$$\Rightarrow P(S_{n+1} \geq n+1) - P(S_n \geq n) \leq 0$$

La suite $(P([S_n \geq n]))$ est donc décroissante.

e. Montrer que les deux suites $(P([S_n \leq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P([S_n \geq n]))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Les deux suites sont décroissantes et minorées par 0, donc elles sont toutes deux convergentes.

Partie III, Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , de fonction de répartition F . On appelle médiane de X , tout réel m vérifiant les deux conditions : $P([X \leq m]) \geq \frac{1}{2}$ et $P([X \geq m]) \geq \frac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} admettant une espérance $E(X)$.

a. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E(|X - r|) = E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P([X = k]).$$

$r \in \mathbb{N}^*$

Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$|k - r| = k - r \text{ si } k - r > 0 \iff k > r$$

$$|k - r| = r - k \text{ si } k - r < 0 \iff k < r$$

$$|k - r| = 0 \text{ si } k = r$$

Donc

$$\begin{aligned} E(|X - r|) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |k - r|P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} |k - r|P(X = k) + \sum_{k=r}^{+\infty} |k - r|P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k) + \sum_{k=r}^{+\infty} (k - r)P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} (k - r)P(X = k) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r-1} (k - r)P(X = k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} (k - r)P(X = k) + \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k) + \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X = k) - r \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P(X = k) + E(X) - r \end{aligned}$$

b. Montrer que : $\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P([X = k]).$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} F(k) &= \sum_{k=0}^{r-1} P(X \leq k) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{i=0}^k P(X = i) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq r-1 \\ 0 \leq i \leq k}} P(X = i) \\ &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq r-1} P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=i}^{r-1} P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \left(P(X = i) \sum_{k=i}^{r-1} 1 \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} P(X = i)[(r - 1) - i + 1] \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} P(X = i)(r - i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} P(X = k)(r - k)$$

En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$E(|X - r|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} E(|X - r|) &= E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} (r - k)P([X = k]) \\ &= E(X) - r + 2 \sum_{k=0}^{r-1} F(k) \\ &= E(X) - \sum_{k=0}^{r-1} 1 + 2 \sum_{k=0}^{r-1} F(k) \\ &= E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

c. Soit m une médiane de X . On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de

$$E(|X - r|) - E(|X - m|).$$

Conclure.

$$E(|X - r|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

$$E(|X - m|) = E(X) + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

D'où

$$E(|X - r|) - E(|X - m|) = 2 \left(\sum_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=0}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \right)$$

• 1er cas : $r < m$:

$$E(|X - r|) - E(|X - m|) = 2 \left(- \sum_{k=r}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \right)$$

$$\text{Or } P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - P([X < m]) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P([X < m]) \leq \frac{1}{2}$$

Or pour $k \in [[r; m - 1]]$,
 $k < m - 1$

$$\Rightarrow F(k) \leq F(m - 1) = P(X \leq m - 1) = F(m)$$

$$\Rightarrow F(k) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F(k) - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=r}^{m-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow E(|X - r|) - E(|X - m|) \geq 0$$

• 2ème cas : $r = m$

$$\text{Alors } E(|X - r|) - E(|X - m|) = 0$$

• 3ème cas : $r > m$

Dans ce cas :

$$E(|X - r|) - E(|X - m|) = 2 \sum_{k=m}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Or } P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

Pour $k \in [[m; r - 1]]$

$$k \geq m$$

$$\Rightarrow F(k) \geq F(m) \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F(k) - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow E(|X - r|) - E(|X - m|) \geq 0$$

• Conclusion : Pour tout $r \in \mathbb{N}$, $E(|X - r|) - E(|X - m|) \geq 0$

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur \mathbb{R} .

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $M(x) = E(|X - x|)$.

a. Établir pour tout $x \geq 0$ l'encadrement

$$0 \leq x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} t f(t) dt$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1$
 $\Rightarrow 1 - F(x) \geq 0$
 $\Rightarrow x(1 - F(x)) \geq 0 \quad \text{car } x \geq 0$

- Pour $t \in [x; +\infty[$
 $t \leq x$

$$\Rightarrow t.f(t) \leq x.f(t)$$

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} t.f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} x.f(t) dt$$

Les intégrales convergent respectivement parce que X admet une espérance et f est une densité

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} t.f(t) dt \leq x \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_x^{+\infty} t.f(t) dt \leq x(1 - F(x))$$

En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$.

X admet une espérance, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t) dt$ converge

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} t.f(t) dt = 0$$

$$\text{Donc, par encadrement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0$$

En considérant la variable aléatoire $-X$, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0.$$

En appliquant cette propriété à $-X$, on obtient

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y(1 - G(y)) = 0 \text{ avec } G \text{ la fonction de répartition de } -X$$

En posant $y = -x$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x(1 - G(-x)) = 0$$

Or

$$G(-x) = P(-X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - F(x)$$

$$\text{D'où : } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x(F(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x(F(x)) = 0$$

b. Établir pour tout x réel, la relation :

$$M(x) = \int_{-\infty}^x F(t) dt + \int_x^{+\infty} (1 - F(t)) dt$$

$$M(x) = E(|X - x|)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |t - x| f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^x |t - x| f(t) dt + \int_x^{+\infty} |t - x| f(t) dt$$

Or

$$\text{pour } t \leq x, |t - x| = -t + x$$

$$\text{pour } t \geq x, |t - x| = t - x$$

Donc

$$M(x) = \int_{-\infty}^x (-t + x) f(t) dt + \int_x^{+\infty} (t - x) f(t) dt$$

Étudions séparément les deux intégrales :

- Posons $I(a) = \int_a^x (-t + x) f(t) dt$

Faisons une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(t) = -t + x & u'(t) = -1 \\ v'(t) = f(t) & v(t) = F(t) \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R} . Donc

$$I(a) = [(-t + x)F(t)]_a^x - \int_a^x -F(t) dt$$

$$= [0 - (-a + x)F(a)] + \int_a^x F(t) dt$$

$$= aF(a) - xF(a) + \int_a^x F(t) dt$$

On a vu que $\lim_{a \rightarrow -\infty} aF(a) = 0$ et on a : $\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^x (-t+x)f(t)dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} I(a) = \int_{-\infty}^x F(t)dt$$

$$\bullet \text{ Psons } J(a) = \int_x^a (t-x)f(t)dt$$

$$\begin{cases} u(t) = t-x & u'(t) = 1 \\ v'(t) = f(t) & v(t) = F(t) - 1 \end{cases}$$

u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R} . Donc

$$\begin{aligned} J(a) &= [(t-x)(F(t)-1)]_a^x - \int_a^x (F(t)-1)dt \\ &= [0 - (a-x)(F(a)-1)] + \int_a^x (1-F(t)) dt \end{aligned}$$

$$= a(1-F(a)) - x(1-F(a)) + \int_a^x (1-F(t)) dt$$

On a vu que $\lim_{a \rightarrow +\infty} a(1-F(a)) = 0$ et on a : $\lim_{a \rightarrow +\infty} 1-F(a) = 0$

$$\text{Donc } \int_x^{+\infty} (t-x)f(t)dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \int_a^{+\infty} (1-F(t))dt$$

\bullet En rassemblant les deux intégrales :

$$M(x) = \int_{-\infty}^x F(t)dt + \int_a^{+\infty} (1-F(t))dt$$

c. Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$M(b) - M(a) = \int_a^b (2F(t) - 1)dt.$$

$$\begin{aligned} M(b) - M(a) &= \left[\int_{-\infty}^b F(t)dt + \int_b^{+\infty} (1-F(t))dt \right] \\ &\quad - \left[\int_{-\infty}^a F(t)dt + \int_a^{+\infty} (1-F(t))dt \right] \\ &= \left[\int_{-\infty}^b F(t)dt + \int_b^{+\infty} (1-F(t))dt \right] \\ &\quad + \left[\int_a^{-\infty} F(t)dt + \int_{+\infty}^a (1-F(t))dt \right] \\ &= \int_a^b F(t)dt + \int_b^a (1-F(t))dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^b F(t) - (1-F(t))dt$$

$$= \int_a^b (2F(t) - 1)dt$$

d. On note m une médiane de X . Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.

$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$. Comme X est une variable à densité, cela revient à avoir : $F(m) \geq \frac{1}{2}$ et $1-F(m) \geq \frac{1}{2}$
c'est-à-dire : $F(m) = \frac{1}{2}$

$$\text{D'autre part, on a : } M(b) - M(m) = \int_m^b (2F(t) - 1)dt$$

\bullet 1er cas : $b \leq m$

$$M(b) - M(m) = - \int_b^m (2F(t) - 1)dt$$

Pour $t \in [b,m]$, $t \leq m \Rightarrow F(t) \leq F(m)$ car F croissante

$$\Rightarrow F(t) \leq 1/2 \Rightarrow 2F(t) - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_b^m (2F(t) - 1)dt \leq 0 \quad \text{car } b \leq m$$

$$\Rightarrow M(b) - M(m) \geq 0$$

\bullet 2er cas : $m \leq b$

$$M(b) - M(m) = \int_m^b (2F(t) - 1)dt$$

Pour $t \in [m,b]$, $m \leq t \Rightarrow F(m) \leq F(t)$ car F croissante

$$\Rightarrow F(t) \geq 1/2 \Rightarrow 2F(t) - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_m^b (2F(t) - 1)dt \geq 0 \quad \text{car } m \leq b$$

$$\Rightarrow M(b) - M(m) \geq 0$$

\bullet Dans tous les cas, $M(b) \geq M(m)$

Donc m est un point en lequel M admet son minimum.